कृष्णदास संस्कृत सीरीज

१०७

म० म० पण्डितश्रीसुधाकरद्विवेदिप्रणीतम्

भाभ्रमरेखानिरूपणम्

सम्पादको व्याख्याकारश्च

आचार्य उमाशङ्करशुक्लः

ज्योतिषाचार्यः (गणित, सिद्धान्त, फलित),

एम. ए. (गणित), लब्धस्वर्णपदकः

गणित-ज्योतिषप्राध्यापकः

सम्पूर्णानन्द-संस्कृत-विश्वविद्यालये,

वाराणसी



कृष्णदास अकादमी, वाराणसी

१९८८

प्रकाशक : कृष्णदास अकादमी, वाराणसी

मुद्रक : चौखम्बा प्रेस, वाराणसी

संस्करण : पुनर्मुद्रित, वि० सं० २०४५

मूल्य : रू० ७-००

पो० बा० नं० १११८

चौक, (चित्रा सिनेमा बिल्डिंग), वाराणसी-२२१००१

अपरं च प्राप्तिस्थानम्

चौखम्बा संस्कृत सीरीज आफिस

के. ३७/९९, गोपाल मन्दिर लेन

पो. बा. १००८, वाराणसी-२२१००१ (भारत)

फोन : ६३१४५

KRISHNADAS SANSKRIT SERIES
107



BHĀBHRAMAREKHĀNIRŪPAṆAM

OF

M. M. Pt. SUDHAKAR DWIVEDI

Editor & Commentator

ACHARYA UMASHANKAR SHUKLA

Jyotishacharya (Ganita, Siddhanta & Falita),
M. A. (Math.) Gold Medallist
Senior Lecturer in Mathematics & Astronomy
Sampurnananda Sanskrit University, Varanasi.



KRISHNADAS Academy

VARANASI–221001
1988

Oriental Publishers & Distributors

POST BOX No. 1118

Chowk, (Chitra Cinema Building), Varanasi-221001

(INDIA)

Reprinted

1988

Price Rs. 7-00

Also can be had from

Chowkhamba Sanskrit Series Office

K. 37/99, Gopal Mandir Lane

Post Box 1008, Varanasi-221001 (India)

Phone : 63145

PREFACE

The book **'Bhabhram Rekha Nirupanam'** composed by Pt. Sudhakar Dwivedi, is a link between the study of Indian and Modern Astronomy. Without the knowledge of mathematics none can dare to reveal the facts of Siddhanta Jyotish. So the mathematics and astronomy is very essential for it. Pt. Dwivedi was a renowned scholar of his age. He had studied ancient Indian and modern astronomy thoroughly and had written many books in all the three branches of Indian astronomy and mathematics as well.

The theory of the 'Shadow-path' is known in India since the time of the "Surya Siddhanta". The path is a circle at all places on the surface of the earth. This theory was accepted and worked upon by several Indian ancient astronomers like Lalla, Sripati etc. Later on Bhaskaracharya proved the theory to be wrong but could not establish his own theory firmly. After that Mahamahopadhyaya Pandit Sudhakar Dwivedi wrote this book where he has clearly shown that the path of shadow is a hyperbola where the latitude is less than 66°. Above this latitude shadow-path is a parabola, after that near the Meru it is an ellipse. On the Meru (where the latitude is 90°), it is a circle. It is a straight line at zero latitude on equinoxes.

This book is very useful to the students of Siddhanta Jyotish learning in Acharya classes. In this edition I have solved unsolved problems raised by the author in the end of the book. I have also given footnotes where it was necessary to create further interest of students. My readers will kindly excuse me for any mistake which might have crept into it unknowingly, last of all I thank the head of the Chowkhamba Sanskrit Series Office who has kindly taken the trouble of publishing the book.

U. S. Shukla
Senior Lecturer in
Mathematics & Astronomy,
Sampurnananda Sanskrit University,
Varanasi–221 002

20 October, 1988

भूमिका

नत्वा गुरुं गणेशञ्च स्मृत्वाऽवधविहारिणम् ।
पितृपादं सदा ध्यात्वा भाज्ञानं वितनोम्यहम् ।।

ज्योतिषे भाभ्रमविचारः प्राचीनकालादेव वर्तते । शङ्कुच्छायायाः प्रयोगः प्रायः सर्वेषु सिद्धान्तग्रन्थेषु करणग्रन्थेषु च दृश्यते । शङ्कुस्तत्र द्वादशाङ्गुलः । शङ्कोः दिग्ज्ञाने च्छायानयने चावश्यकता भवति । 'दिनार्द्धभा या पलभा भवेत्सा' इति गणेशदैवज्ञेन स्वकीये ग्रहलाघवे लिखितम् ।

भा (च्छाया) प्रयोगः वेदे, स्मृतौ, साहित्ये च सर्वत्रावलोक्यते, परञ्च भाकारविषये कुत्रापि वर्णनं न लभ्यते । भारते सूर्यसिद्धान्त-कालादेव "इष्टेऽह्नि मध्ये प्राक् पश्चाद् धृते बाहुत्रयान्तरे । मत्स्य-द्वयान्तरयुतेः त्रिस्पृक् सूत्रेण भाभ्रमः" इत्यादिना वृत्ताकारो भाभ्रमो निर्णीतः । ततः परं कतिभिरेव प्राचीनैर्ज्योतिर्वैज्ञानिकैर्लल्लश्रीपतिमुख्यैः स एवानुमोदितः । एतल्लल्लाचार्यवाक्येन स्पष्टं भवति —

अग्रेषु चिह्नानि विधाय वृत्तैर्मिथोऽवगाहैर्लिखितैस्तु तेभ्यः ।
तिमी भवेतां मुखपुच्छसक्ते रज्जू प्रसार्यावनयोर्युतिर्या ।।
ततश्च चिह्नत्रयसक्तवृत्तं यल्लिख्यते भाग्रपरिभ्रमः सः ।
अतोऽन्यथा बाहुखमध्यभासां न्यासाद् भवेच्छङ्कुपरिभ्रमः सः ।।
शङ्कोर्दिशां मध्यगतस्य भाग्रं रेखा न जह्यात् खलु भाभ्रमः सः ।
शङ्कुभ्रमेण भ्रमतश्च शङ्कोच्छायाग्रमाशागणयोगचिह्नम् ।।

पश्चात् भास्कराचार्यः स्वसिद्धान्तशिरोमणेः गोलाध्याये 'भात्रित-याद् भाभ्रमणं न सत्' इत्यनेन वृत्ताकारभाभ्रमस्य खण्डनञ्चकार । परञ्च किच्छायाभ्रमणमार्गस्य वास्तवस्वरूपं भवेदिति न स्पष्टी-कृतवान् । कमलाकरदैवज्ञमते अर्कादितेजोबिम्बानां किरणप्रसार-

मार्गे यदि कश्चित्पार्थिवपदार्थोऽवरोधकस्तर्हि तेनावरुद्धकिरणास्तदग्रे गन्तुमसमर्था भवन्ति। अतस्तत्र प्रकाशाभाव एव भा (च्छाया) उच्यते। यथा—

यावान् करावरोधेन व्यक्तो यः करमध्यगः।
विस्तारायामतस्तावान् ज्ञेयो भासंज्ञकोऽत्र सः॥

अनेन च्छायायाः परिभाषा एव लिखिता। भास्वरूपविषये कोऽपि स्पष्टोल्लेखो न कृतः। श्रीबापूदेवशास्त्रिणा सिद्धान्तशिरोमणेः गोलाध्यायस्य संशोधने लिखितम्—

"वास्तवभाभ्रमरेखायास्तु शङ्कुच्छिन्नाभिधान (Conic Sections) गणितविधानेनावगमः सुगमः" इति।

अनेन महोदयेनाऽपि स्पष्टसमाधानं भाकारविषये न दत्तम्।

प्राच्य-प्रतीच्योभयगणितज्योतिषवेत्ता म० म० पण्डितसुधाकरद्विवेदिमहोदयः न केवलं भाभ्रमस्वरूपं स्पष्टीकृतवान्, अपितु भास्काराचार्येण यद् भ्रमवशाद् आर्षविरोधः भाभ्रमविषये कृतः तस्याद्भुतं समाधानं स्वप्रतिभापूर्णधिया दत्तवान्। तेन स्वसुधावर्षिण्यामुट्टङ्कितम्—'रवेरहोरात्रवृत्तमेकस्मिन् दिने यदि स्थिरं कल्प्यते क्रान्तेश्चलनाल्पत्वात्तदा "मेरुपृष्ठे सुखासीना ऋषयः पुरा" इत्यादिसूर्यसिद्धान्त-प्रथम-श्लोक-टीका-वचनेन सूर्यसिद्धान्त-रचना मेरौ जाताऽतो मेरौ च भाभ्रमो वृत्ते भवति, अतस्तत्र सौरो भाभ्रमः समीचीनः। अन्यत्र तु वृत्ते भाभ्रमो न भवति—इति "भात्रितयाद् भाभ्रमणं न सत्" इत्यादि भास्करेण समीचीनमुक्तम्।

महाविदुषा सुधाकरेण भाभ्रमस्वरूपप्रतिपादनार्थं "भाभ्रमरेखानिरूपणम्' नामको ग्रन्थो विरचितः। अस्य स्पष्टीकरणाय 'दीर्घवृत्तलक्षणम्', 'दिङ्मीमांसा' 'प्रतिभाबोधकम्' इत्यादिग्रन्थास्तेन निर्मिताः। येषां साहाय्येन तेन प्रतिपादितं यद् भाभ्रमणं शङ्कुच्छिन्नाभिधानक्षेत्रे भवति।

यद्येकस्मिन् दिने रविक्रान्तिः स्थिरा कल्प्यते तदा प्रत्येकाहोरात्रवृत्तीयबिन्दुगतरविबिम्बगता शङ्क्वग्राद् या सूची भवेत्तत्कर्णा यत्र यत्र पृष्ठक्षितिजधरातले लग्ना भवन्ति तदाकारा क्षितिजधरातले भाभ्रममार्गो भवेत्। अयं भाभ्रममार्गः शङ्कुच्छिन्नक्षेत्रमुद्दिश्य पञ्चविधो' भवति—

१—अतिपरवलयम्।

२ - परवलयम्।

३—दीर्घवृत्तम्।

४—वृत्तम्।

५—रेखा।

यदा समानसम्बन्धः (इ) रूपाधिकस्तदा क्षेत्रम् अतिपरवलयं भवति। यदा अयं रूपसमः तदा परवलयं, यदा अयं रूपाल्पस्तदा क्षेत्रं दीर्घवृत्तम् भवति। अर्थात्

यदा इ > १, शङ्कुछिन्नक्षेत्रम् अतिपरवलयम्।

यदा इ = १, शङ्कुछिन्नक्षेत्रं परवलयम्।

यदा इ < १, शङ्कुच्छिन्नक्षेत्रं दीर्घवृत्तम्।

प्रायः षट्षष्टिभागाक्षतो (६६° अक्षांशतः) न्यूनाक्षांशदेशे भाभ्रमपथमतिपरवलयं भवति, तदासन्नदेशे परवलयं भवति, तदन्यत्र मेरोः समीपे दीर्घवृत्तं भवति, मेरौ (९०° अक्षांशदेशे) वृत्तं भवति। निरक्षे (शून्याक्षांशदेशे) विषुवद्दिने भाभ्रममार्गो रेखा भवति।

ग्रन्थस्यास्य सम्पादने मयापि पाश्चात्यगणितज्ञानां लोनी-स्मिथ-स्मार्ट-बालप्रभृतीनां गणितज्योतिषविषयकान् ग्रन्थांश्च समवलोक्य बापूदेव-सुधाकर-दयानन्द-लषणलाल गुरूणाञ्च भाभ्रम-विषयकविचारान् संगृह्य, छात्राणां मनसि छायाभ्रमणपथे

रुचिमुत्पादयितुं ग्रन्थकारकृतानां प्रश्नानां सान्वयसमाधानं परिशिष्टे दत्तम्। ग्रन्थस्य सरलीकरणाय मध्ये मध्ये मया सरला टिप्पण्यपि निवेशिता। ग्रन्थान्ते च्छात्राणां बुद्धिविकासाय परीक्षोपयोगिप्रश्नसंग्रहोऽपि मया समायोजितः।

एवं महत्प्रमोदास्पदं यत् "भाभ्रमरेखानिरूपणम्" इति ग्रन्थरत्नं चौखम्बा-संस्कृत-सीरीज-आफिसाध्यक्षेण प्रकाश्यत इति ध्रुवं विद्यार्थिनां विदुषाञ्च महते श्रेयसे कल्पेत इति नो द्रढीयान् विश्वासः।

विदुषां वशंवदः

उमाशंकरशुक्लः

गणितज्योतिषप्राध्यापकः

सम्पूर्णानन्द-संस्कृत-विश्वविद्यालये

वाराणस्याम्
विजयादशम्याम्
वि० सं० २०४५

विषयानुक्रमणिका



॥ श्रीजानकीवल्लभो विजयते ॥

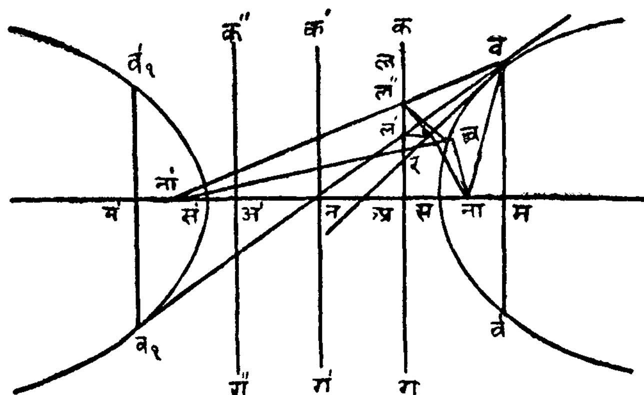
भाभ्रमरेखानिरूपणम्

वारं वारं रामपादारविन्दं वन्दे वक्ष्ये यत्प्रसादावलम्बात् ।
सूचीक्षेत्रं यद्विचारेण चारु भाग्रज्ञानं जायते स्वस्वभूजे ॥ १ ॥

रविकेन्द्राच्छङ्क्वग्रगामि सूत्रं स्वपृष्ठक्षितिजे यत्र लगति, शङ्कुमूलात्तदवधि छाया। एवं प्रतिक्षणं छायाज्ञानम् । अथ यदि रविक्रान्तिरेकस्मिन् दिने स्थिरा कल्प्यते, तदा तद्दिने चैकस्मिन्नहोरात्रवृत्त एव रविकेन्द्रं प्रवहवायुकारणेन भ्रमिष्यति । अतः शङ्क्वग्रात्तदहोरात्रवृत्तस्य प्रतिबिन्दुं कृता रेखास्तासां वर्धनेन या विरुद्धसूची तां स्वपृष्ठक्षितिजधरातलं यथा छिनत्ति तादृगेव भाभ्रमरेखा तस्य ज्ञानार्थं दीर्घवृत्तलक्षणे दीर्घवृत्तं तूक्तमेव । अतिपरवलयपरवलयोः क्षेत्रयोस्तावदतिपरवलयं वच्मि ।

अथातिपरवलयक्षेत्रम्

निश्चलचिह्नाद्यस्य परिधिस्थं रेखिका कृता बिन्दुम् ।
याऽथो निश्चलरेखोपरि तद्बिन्दोः कृतो लम्बः ॥ २ ॥
अनयोर्यदि सम्बन्धो रूपानल्पो भवेत्समानश्च ।
[1]अतिपरवलयक्षेत्रं विहितं तद्भाभ्रमोपयोगीह ॥ ३ ॥



1—यदा सम्बन्धो रूपाधिको (इ > १) भवति तदा क्षेत्रमतिपरवलयं स्यात् ।

अत्राक्षादिसंज्ञा दीर्घवृत्तवत् । तद्यथा ना नियतबिन्दुरस्य क्षेत्रस्य नाभिः । कग अक्षरेखा । अक्षोपरि ना स्थानात्कृतस्य नाअ लम्बस्य मूलम् अ मूलबिन्दुः । नाअ सर्वदा स्थिरसंख्याऽस्ति, तद्योतकः=प । परिधिस्थ व बिन्दोः कग अक्षोपरि तथा अना वर्धितरेखोपरि यौ वल (=अम), वम लम्बौ तौ क्रमेण व बिन्दोः कग अक्षापेक्षया भुजकोटी भवतः । वना रेखा कृताऽस्ति । समानसम्बन्धद्योतकवर्णः= इ । एवं परिधिस्थात् च बिन्दोरपि कग अक्षोपरि चलं लम्बः कृतः । तथा नाच रेखा कृता । इत्थं यदि $\frac{\text{नाच}}{\text{चलं}} = \frac{\text{नाव}}{\text{वल}} = \text{इ} > 1$ तदेदं क्षेत्रमतिपरवलयसंज्ञं ज्ञेयमिति ।

अत्रापि यदि व बिन्दोर्भुजः = वल = अम, कोटिः = वम तदा वनाम जात्यत्रिभुजत्वात्

$$\text{वम}^2 = \text{वना}^2 - \text{नाम}^2$$

परन्तु $\frac{\text{नाव}}{\text{वल}} = \text{इ} \therefore \text{वना} = \text{इ}.\ \text{वल} = \text{इ}.\ \text{अम} = \text{इ}.\ \text{भु}$

तथा $\text{नाम} = \text{अम} - \text{अना} = \text{भु} - \text{प}$

$$\therefore \text{वम}^2 = \text{इ}^2\text{भु}^2 - (\text{भु} - \text{प})^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

यद्यत्र वम = ० अर्थाद्यदा व बिन्दुः स बिन्दौ स्यात्तदा

$$\text{इ}^2\text{भु}^2 - (\text{भु} - \text{प})^2 = 0$$

वा $$(\text{भु} - \text{प})^2 = \text{इ}^2\text{भु}^2$$

पक्षयोर्मूलग्रहणेन

$$\text{भु} - \text{प} = \mp \text{इ}.\ \text{भु}$$

वा $$\text{भु} \pm \text{इ}.\ \text{भु} = \text{प}$$

वा $$\text{भु}\,(1 \pm \text{इ}) = \text{प}$$

$\therefore$ $$\text{भु} = \frac{\text{प}}{1 \pm \text{इ}} \text{।}$$

अत्र $\text{अस} = \text{अना} - \text{नास}$

परन्तु $\frac{\text{नास}}{\text{अस}} = \text{इ} \therefore \text{नास} = \text{इ अस}$

$\therefore \text{अस} = \text{अना} - \text{इ.अस}$

वा $\text{अस} + \text{इ.अस} = \text{अना}$

वा $\text{अस} (१ + \text{इ}) = \text{अना}$

$\therefore \text{अस} = \frac{\text{अना}}{१+\text{इ}} = \frac{\text{प}}{१+\text{इ}}$ ।

अथ $\frac{\text{प}}{१-\text{इ}}$ इयम् ऋणात्मिका तेन दिग्वैपरीत्येन

$\text{अस}' = \text{नास}' - \text{अना}$ परन्तु $\frac{\text{नास}}{\text{अस}} = \text{इ}$ । स' बिन्दोः क्षेत्रस्थत्वात् ।

$\therefore \text{नास}' = \text{इ.अस}'$

$\therefore \text{अस} = \text{इ.अस}' = -\text{अना}$

वा $\text{अस} - \text{इ. अस} = -\text{अना}$

वा $\text{अस} (१ - \text{इ}) = -\text{अना}$

$\therefore \text{अस}' = \frac{-\text{अना}}{१-\text{इ}} = \frac{-\text{प}}{१-\text{इ}} = \frac{\text{प}}{\text{इ}-१}$

ततः $\text{सस} = \text{अस} + \text{अस}' = \frac{\text{प}}{\text{इ}+१} + \frac{\text{प}}{\text{इ}-१} = \frac{२\,\text{इ. प}}{\text{इ}^{२}-१} = २\text{क}$

$= \text{वृ. व्या.}$

अयमेवात्र व्यासो यत्र $\text{क} = \frac{\text{इ. प}}{\text{इ}^{२}-१}$ ।

अथ यदि स मूलबिन्दुर्यस्माद्भुजप्रवृत्तिस्तदा भुजः = भु = सम

तथा पूर्वभुजः = पूभु = अम = सम + अस = भु + अस

ततः $\quad$ नाव = इ. अम = इ. पूभु = इ (भु + अस)

$$= इ\left(भु + \frac{प}{इ+१}\right) = इ.\ भु + \frac{इ.\ प}{इ+१}$$

$$= इ.\ भु + \frac{इ.\ प\ (इ-१)}{(इ+१)(इ-१)} = इ.\ भु. + \frac{इ.\ प}{इ^{२}-१}(इ-१)$$

$$= इ.\ भु + क\ (इ-१)$$

तथा नाम = सम − नास परन्तु $\frac{नास}{अस}$ = इ. ∴ नास = इ.अस

$$\therefore\ नाम = सम - इ.\ अस = भु - \frac{इ.\ प}{इ+१}$$

$$= भु - \frac{इ.\ प\ (इ-१)}{(इ+१)(इ-१)}$$

$$= भु - \frac{इ.\ प}{इ^{२}-१}(इ-१) = भु - क\ (इ-१)$$

आभ्यां कोटिवर्गः = वम^{२} = नाव^{२} − नाम^{२}

$$= \left\{इ.\ भु + क\ (इ-१)\right\}^{२} - \left\{भु - क\ (इ-१)\right\}^{२}$$

$$= \left\{इ.\ भु + क\ (इ-१) + भु - क(इ-१)\right\} \times \left\{इ.\ भु + क\ (इ-१) - भु + क\ (इ-१)\right\}$$

$$= (इ.\ भु + भु)\ (इ.\ भु - भु + २\ क.\ इ - २\ क)$$

$$= भु(इ+१)\ \left\{भु(इ-१) + २\ क\ (इ-१)\right\}$$

$= भु(इ+१)(इ-१)(भु+२क)$

$= (इ^२-१)(भु^२+२क.भु.)$ ....(२)

अथ यदि न व्यासदलबिन्दुरेव मूलबिन्दुर्यस्माद्भुजगणना तदा

$नस = क$

$भुजः = भु = नम$

$\therefore नम - नस = भु - क = सम =$ द्वितीयसमीकरणस्य भुजः

अर्थात् $सम = भुजः = भु' - क$

ततः (२) समीकरण एतन्मानोत्थापनेन

$वम^२ = (इ^२-१)\{(भु'-क)^२+२क(भु'-क)\}$

$= (इ^२-१)(भु-क)\{भु'-क+२क\} = (इ^२-१)$

$(भु-क)(भु+क)$

$= (इ^२-१)(भु^२-क^२)$ ....(३)

अत्र यावद्भुजस्य मानम् $< \pm$ क तावत्कोटेर्मानमसम्भवं तदधिके भुजे तु कोटेर्मानं द्विविधं दिग्विपरीतेन समानमेव तेन

$वम = वं'म$

एवमृणभुजेऽपि तदेव कोटिमानस्य द्वैविध्यम् तस्मात्

$नम = नम'$

तथा $वम = वं'म = व_१ म' = वं'_१ म'$ ।

अतोऽक्षात्पार्श्वद्वयेऽतिपरवलयस्य विभागद्वयं मिथः सर्वांशैः समानमेव ।

अथ यदि सस व्यासोपरि लम्बरूपायां व्यासदलबिन्दुगामिन्यां क'न

ग' रेखायां च बिन्दुस्तथा गृहीतो यथा $न च^2 = नना^2 - नस^2$

$= (नना - नस)(नना + नस) = नास.\ ना स'$

तदा $\dfrac{न च^2}{न स^2} = \dfrac{नना^2 - नस^2}{नस^2} = \dfrac{नना^2}{नस^2} - १$

परन्तु $नास = इ\ अस,\ नास' = इ\ स'\ अ$

अनयोर्योगेन $नास + नास' = इ\ (अस + स'\ अ) = इ.\ सस'$

वा $ना ना' = इ.\ सस'$

वा $२\ नना' = २\ इ.\ नस$

$\therefore\ नना = इ.\ नस$

$\therefore \dfrac{नच^2}{नस^2} = \dfrac{इ^2.नस^2}{नस^2} - १ = इ^2 - १$

अत्रैव $नच^2 = अ^2 =$ लघुव्यासार्धवर्गस्तथा $नस =$ वृहद्व्यासार्धवर्गः कल्प्यः ।

$$\therefore \dfrac{\left(\dfrac{लव्या}{२}\right)^2}{\left(\dfrac{वृव्या}{२}\right)^2} = \dfrac{लव्या^2}{वृव्या^2} = इ^2 - १$$

अथ यदि $= क^2(इ^2 - १) = अ^2$

वा $इ^2 - १ = \dfrac{अ^2}{क^2}$

$इ^2 - १$ अस्य मानं (२) समीकरण उत्थापनेन

तदा $$वम^2 = \frac{अ^2}{क^2} (भु + २भु. क) \ldots\ldots (४)$$

(३) समीकरणे तन्मानोत्थापनेन

$$वम^2 = \frac{अ^2}{क^2} (भु^2 - क^2) \ldots\ldots (५)$$

(५) समीकरणे यदि भु = ० तदा

$$वम^2 = \frac{अ^2}{क^2} (० - क^2) = -अ^2$$ अस्य मूलसम्भवमेव ।

एवं २ क = बृहद्व्यासमानम्, $अ^2$ = लघुव्यासार्धवर्गं च प्रकल्प्य दीर्घवृत्तवदत्रापि प्रायो बहवो विशेषा विभावनीयाः ।

यथात्रापि ना, ना' नाभिसंज्ञे कल्प्ये तदा

$$अम = नम - नअ = नम - (नस - अस) = भु' - क + \frac{प}{इ + १}$$

$$ततः\ नाव = इ.\ अम = इ.\left(भु' - क + \frac{प}{इ+१}\right) = इ.\ भु' - इ.क + \frac{इ.\ प}{इ + १}$$

$$एवं\ अ'म = नम + अन = नम + अन = नम + (सन - अस)$$

$$= भु' + क - \frac{प}{इ+१}$$

$$ततः\ ना'व = इ.\ अ'म = इ\left(भु' + क - \frac{प}{इ+१}\right)$$

$$= इ.\ भु' + इ.\ क - \frac{इ.\ प}{इ+१}$$

अनयोरन्तरम् = ना'व − नाव

$$= \left(इ.\ भु' + इ.\ क - \frac{इ.\ प}{इ+१}\right) - \left(इ.\ भु - इ.\ क + \frac{इ\ प}{इ+१}\right)$$

$$=\text{२इ.क} - \frac{\text{२इ. प}}{\text{इ} + \text{१}} = \text{२ इ. क} - \text{२ क} (\text{इ} - \text{१})$$

$$= \text{२ क}$$

$$= \text{२ क} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{६})$$

अनेन

[1]नाभिभ्यां वृतिबिन्दुं ये गते रेखे तदन्तरम् ।
क्षेत्रव्याससमं ज्ञेयमस्मिन् क्षेत्रे विदा सदा ॥ ४ ॥

इत्युपपन्नं भवति ।

अतिपरवलये स्पर्शरेखाकरणयुक्तिः[२]—

अथैवमत्रापि नांवना कोणार्धकारिणीरेखा व बिन्दौ स्पर्शरेखा भवति। यथा वर रेखा कोणार्धकारिणी तदेयं स्पर्शरेखा व बिन्दौ भविष्यति।

१—प्रकारान्तरेण—

अतिपरलवये नाभिभ्यां पालिगते ये रेखे तयोरन्तरं क्षेत्रव्याससमं भवति।

अथ

$$\text{नाव} = \text{इवल}$$

तथा $\text{नांव} = \text{इ} \times \text{वत}$

अनयोरन्तरेण

$$\text{नाव} - \text{नाव} = \text{इ} (\text{वत} - \text{वल})$$

परञ्च

$$\text{वत} - \text{वल} = \text{लत} = \text{२ अन}$$

$$\therefore \text{नांव} - \text{नाव} = \text{इ} \times \text{२ अन ।}$$

$$\text{परञ्च इ} \times \text{अन} = \text{क}$$

$$\therefore \text{नाव} - \text{नोव} = \text{२ क} = \text{स स}' = \text{क्षेत्रव्यासः}$$

अनेन

"नाभिभ्यां वृतिविन्दुं ये गते रेखे ·· ···" इति सिद्धम् ।

अथ यदीयं न स्पर्शरेखा तदान्यत्र क्षेत्रपरिधौ च बिन्दावपि योग-स्तदा वर रेखोपरि नार लम्बकरणेन (वर रेखाया वर्धनेन ना'व रेखायां यत्र लगति तत्रैव ल'' बिन्दुर्ज्ञेयः)

च ल' = चना

तथा ना' ल'' = ना' व − व ल' = ना' व − नाव = २ क

परन्तु ना' ल'' च त्रिभुजे ना' ल'' + ल'' च > नाच

अथ ना' ल'' + व ल'' = ना' व यदा व बिन्दौ स्पर्शरेखा भवति ।

यदि च बिन्दौ स्पर्शरेखा चेत्तदा (६) समीकरणेन

ना ल' + चल'' = ना' च इति भवितुमर्हति ।

इदं परस्परविरुद्धमत उक्तमेव तथ्यमेवमन्येऽपि विशेषा बोध्याः ।

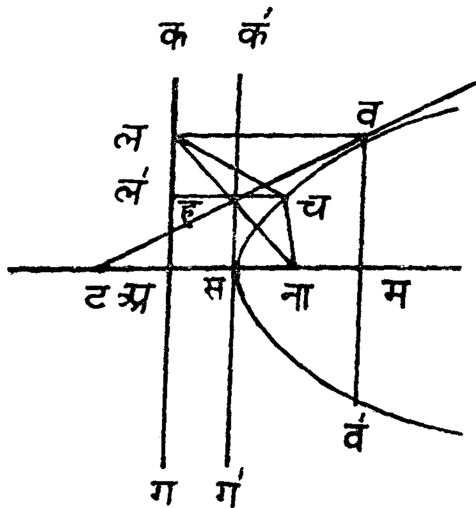
इत्यतिपरवलयक्षेत्रम् ।

२—अथात्र नावना' कोणार्धकारिणी र व रेखा, व बिन्दौ स्पर्शरेखा भवति । यद्येवं नहि तर्हि क्षेत्रपरिधौ च विन्दावपि योगस्तदा नाभिस्थानात् वर रेखोपरि लम्बं कृत्वा वर्धयेत्, सः लम्बः नाव रेखायां यत्र लग्नस्तत्र ल बिन्दौ

अक्षः कार्यः कग; रेखागणितयुक्त्या नाव = वल, अतः ना'न − वल=नाल − २क=बृहद्व्यासः स्यात्पूर्वोक्त्या । अथैवं नाच = चल, तत्राहि नाच − चना = बृहद्व्यासः । अतः नाच − चल = व्यासः परञ्च पूर्वं सिद्धं नाल=बृहद्व्यासः इदानीमपि यदि गृह्यते तदा ना'चल त्रिभुजे नाच − चल=नाल इति स्वरूपं जातं तेन भुजद्वयान्तरं तृतीयभुजतुल्यं जातम् । इत्यसङ्गतम्, तेन पूर्वोक्तमेव वर रेखा स्पर्शरेखा भवेदिति ।

अथ परवलयक्षेत्रम्

या स्यान्निश्चलचिह्नाद्यत्क्षेत्रस्य वृतिस्थविन्दुमत्र ।
रेखाऽथो तद्बिन्दोर्यो लम्बो नियतरेखिकासंस्थः ॥ ५ ॥
अनयोर्मिती समाने यर्हि भवेतां सदा तदा नूनम् ।
परवलयाख्यं क्षेत्रं भवति विचित्रं बहूपयोगीह ॥ ६ ॥



यथात्र यदि $\frac{\text{ना व}}{\text{व ल}} = \frac{\text{ना च}}{\text{च ल'}} = \text{इ} = १$

अर्थात् ना व = व ल, वा नाच = चल' इत्यादि तदा व च स व' क्षेत्रं परवलयसंज्ञं ज्ञेयमिति ।

अथात्र यदि कग अक्षरेखापेक्षया अम = पूर्वभुजः = पू भु

तथा अना = अस + सना परन्तु $\frac{\text{सना}}{\text{अस}}$ = इ = १ ∴ अस = सना

∴ अना = अस + अस = २ अस = २क, यत्र अस = क

तदा $\text{वम}^2 = \text{वना}^2 - \text{नाम}^2 = \text{अम}^2 - (\text{अम} - \text{अना})^2$

$= \text{पू भु}^2 - (\text{पूभु} - 2\,\text{क})^2$ ……………(१)

अत्र यदि वम = ०

तदा $\text{पूभु}^2 - (\text{पूभु} - 2\,\text{क})^2 = 0$

वा $\text{पूभु}^2 = (\text{पूभु} - 2\,\text{क})^2$

∴ $\pm\text{पूभु} = \text{पूभु} - 2\,\text{क}$

(१) यदि पूभु = पूभु − २क

वा ० = क

वा पूभु × ० = क

∴ पूभु $= \frac{\text{क}}{0}$

(२) यदि − पूभु = पूभु − २क

वा २पूभु = २क

∴ पूभु = क

अतोऽस्य क्षेत्रस्य अना लम्बेन सह द्वितीयो योगो न तथा

अस = क = सना।

एवं यदि स मूलबिन्दुर्यस्माद्भुजप्रवृत्तिस्तदा सम = भु

तथा पूर्वभुजः = अम = सम + अस = भु + क

ततः (१) समीकरणे पूर्वभुजमानोत्थापनेन

$\text{वम}^2 = (\text{भु} + \text{क})^2 - \{ (\text{भु} + \text{क}) - 2\text{क} \}^2$

$= (भु + क)^2 - (भु - क)^2$

$= ४क.भु$.................(क) इयं परवलयस्य कोटिः।

अत्रापि भुजकोटिभ्यां दीर्घवृत्तवद्विशेषगुणाश्चिन्त्याः।

[1]अथ परवलये स्पर्शरेखाकरणयुक्तिः—

अत्र परवलये ल व ना कोणस्यार्धकारिणी रेखा व बिन्दौ स्पर्शरेखा भवति। यद्येवं न तर्हि कल्प्यतेऽन्यत्रापि च बिन्दौ योगस्तदा नाल रेखोपरि वह रेखालम्बस्तेन नाच = चल

परन्तु क्षेत्रलक्षणेन नाच = चल'

∴ चल = चल

अर्थात् कोटिकर्णौ तुल्यौ जातावत इदं न युक्तं ततः पूर्वोक्तमेव युक्तम्।

---

१ अथात्र ∠ना व ल कोणार्धकारिणी रेखा व बिन्दौ स्पर्शरेखा भवति। यद्येवं नहि तर्हि कल्प्यतेऽन्यत्रापि च बिन्दौ योगस्तदा वट रेखोपरि ना स्थानात् नाह लम्बो विधेयस्तथा नाह रेखां संवर्ध्य नाह = हल कृत्वा तत्राक्षः क ग कार्यः। अतः ना ह व, व ह ल त्रिभुजयोः नाव=वल तथा नाह=लह। तथा च विन्दुतः चल लम्बः कार्यः। एवं पूर्वोक्त्या ना च=चल तथा परवलये

$\frac{नाच}{चल'} = १$

अतः नाच = चल' भवति।

अतः नाच = चल = चल' अतोऽत्र चल ल' त्रिभुजे कोटिकर्णौ समावत इदं न युक्तमतः पूर्वस्योक्तिः युक्ता।

अथ यदि वट स्पर्शरेखा

तदा   ∠नावट = ∠लवट

परन्तु वल, नाट रेखे मिथः समानान्तरे तेन

∠लवट = ∠वटना

ततः नाट = नाव = अम = सम + अस

∴   टस + अस = सम + अस

पक्षयोः अस समशोधनेन

टस = सम

टवम, टहस त्रिभुजयोः हस रेखा वम – रेखासमानान्तरा तेन

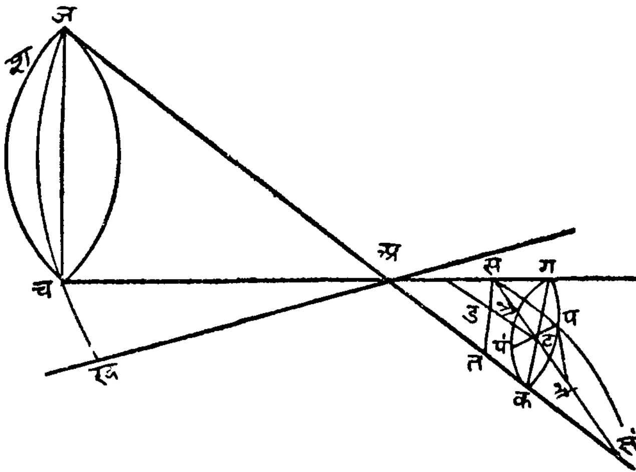
$$\frac{\text{टह}}{\text{हव}} = \frac{\text{टस}}{\text{सम}}$$

परन्तु टस = सम

∴   टह = हव

एवमत्रापि बहवो विशेषाश्चिन्त्याः ।

इति परवलयक्षेत्रम् ।



अथ कल्प्यते अचज विषमा सूची यत्र अ पृष्ठस्थशङ्क्वग्रबिन्दुः । च, ज याम्योत्तराहोरात्रवृत्तसम्पातबिन्दू । च ज रेखा कृता, तदा च ज

व्यासोत्पन्नं रवेरहोरात्रवृतमेवाधारः। तथाधारवृत्तधरातलोपरि अचज त्रिभुजस्य धरातलं याम्योत्तरवृत्तधरातलाभिन्नं लम्बरूपम्, तत्त्रिभुज-धरातले स प प पृष्ठक्षितिजधरातलं च लम्बरूपम्, यतः पृष्ठक्षितिजधरातलोपरि याम्योत्तरवृत्तधरातलं लम्बरूपम्। येन पृष्ठक्षितिजधरातलेन छेदिता शङ्क्वग्राद् वर्धितविरुद्धसूची जातं स प छेदनक्षेत्रपरिधिचापमानं भाभ्रमरेखारूपं यत्र कोऽपि प बिन्दुर्यल्लग्नं सूच्याधारवृत्तसमानान्तरं क प ग पं धरातलं तथा कग, सस रेखे लम्बरूपधरातलतत्त्रिभुजधरातलयोगरेखे, अर्थात् च ज आधारवृत्तसमानान्तरेण धरातलेन विरुद्धसूची छिन्ना तस्य धरातलस्य तथा अ च ज स्थिरत्रिभुजधरातलस्य योगरेखा = क ग।

एवं विरुद्धसूची लम्बरूपपृष्ठक्षितिजधरातलेन छिन्ना तस्य धरातलस्य तथा अचज त्रिभुजधरातलस्य योगरेखा = ससं। लम्बरूपधरातलयोर्योगरेखा अर्थात् पृष्ठक्षितिजधरातलसमानान्तरधरातलयोर्योगरेखा च पटप कल्प्या, तदा रेखागणितस्यैकादशाध्यायेन पट रेखा त्रिभुजधरातले लम्बो भवति। कग रेखा च नवीनसूच्याधारवृत्तस्य कपगप संज्ञकस्य व्यासरेखा।

अथ यदि सप वक्रक्षेत्रस्य स मूलबिन्दुर्यस्माद्भुजप्रवृत्तिस्तदा

सट = भुजः, पट = कोटिः।

तदा रेखागणितस्य तृतीयाध्यायेन

$$\text{पट}^2 = \text{कट} \times \text{टग}$$

अथ च यदि $\angle$अकग = क, $\angle$अगक = ग, $\angle$अससं = स, $\angle$कअग = अ, अस = न, तथा अक रेखासमानान्तरा टड रेखा, कग-रेखासमानान्तरा सत रेखा च तदा सटग त्रिभुजे कोणानुपातेन

$$\text{टग} = \frac{\text{सट} \times \text{ज्याटसग}}{\text{ज्याटगस}} = \frac{\text{भु} \times \text{ज्या}\,(\,180 - \angle\text{अससं}\,)}{\text{ज्याग}}$$

$$= \frac{भु \times ज्याअसस}{ज्याग} = \frac{भु \times ज्यास}{ज्याग}।$$

असत त्रिभुजे च

$$सत = \frac{अस \times ज्यातअस}{ज्याअतस} = \frac{न \times ज्याअ}{ज्याअकग} = \frac{न \times ज्याअ}{ज्याक}$$

यदि अक-रेखासमानान्तरा टड रेखा अग रेखायां ल बिन्दौ लगति

तदा $\angle$टलस = $\angle$तअस = अ

एवं टडस त्रिभुजे

$$\angle डटस = १८० - (\angle असस + \angle टलस)$$
$$= १८० - (स + अ)$$

तथा $\angle$टडस = १८० − $\angle$लडस

$$= १८० - \angle अतस = १८० - \angle अकग$$
$$= १८० - क$$

$$तदा\ डस = \frac{सट \times ज्याडटस}{ज्याटडस} = \frac{भु \times ज्या [१८० - (ख + अ)]}{ज्या (१८० - क)}$$

$$= \frac{भु \times ज्या (स + अ)}{ज्याक}$$

अस्मात् कट = तड = सत − डस

$$= \frac{न.\ ज्या\ अ}{ज्याक} - \frac{भु.\ ज्या\ (स + अ)}{ज्याक}$$

$$= \frac{न.\ ज्या\ अ - भु.\ ज्या.\ (स + अ)}{ज्याक}$$

ततः $पट^२$ = कट × टग

$$= \frac{भु.\ ज्यास}{ज्याग} \left\{ \frac{न.\ ज्या\ अ - भु.\ ज्या\ (स + अ)}{ज्याक} \right\} \quad (१)$$

अथ यदि सट × सट = $पठ^२$ तदा छेदनक्षेत्रं वृत्तं प्रसिद्धमेव,

परन्तु तदा सट × सट = कट × टग

$$\therefore \frac{सट}{टग} = \frac{कट}{टस'}$$

तेन रेखागणितस्य षष्ठाध्यायेन क'टस, सटग त्रिभुजे मिथः सजातीये

यतः ∠क ट स' = ∠स ट ग

∴ ∠अ स स' = ∠अ क ग

अतः स = क

तदा "ते कोणमाने समदिग्गते वा विभिन्नदिक्स्थे भवतः समाने ।
सदा विदा छेदनजातरूपं वेद्यं तु नूनं वलयानुकारम् ॥"

इत्यनेन पूज्यपादपितृकृतप्रतिभाबोधकग्रन्थस्थे सूत्रेण छेदनक्षेत्रं वृत्तं भवति अतो यदि स, क कोणौ मिथो न तुल्यौ तदा यदि

ज्या (स + अ) = ज्या [१८० − (स + अ)] = ज्या स ट ड इयमृणात्मिका स्यात्तदा सट रेखा डट रेखाया अन्यदिशि अच रेखायां कुत्रापि लगिष्यति । तस्मात् सट योगरेखा वर्धितसूची स बिन्दौ न लगत्यतस्तत्र दीर्घवर्त्तुलाभावः । अत एव यदि ज्या (स + अ) इयं सर्वदा धनात्मिका तदा (१) समीकरणेन तत् क्षेत्रं दीर्घवर्त्तुलम्, तत्र

$$पट^{२} = कट.टग$$

परन्तु कस' ट त्रिभुजे

$$कट = \frac{स'ट \times ज्या\ क\ स'\ ट}{ज्या\ स\ क\ ट}$$

$$= \frac{स\ ट \times ज्या\ [१८० - (\ स + अ\ )\ ]}{ज्या\ (\ १८० - क\ )}$$

$$= \frac{भु.\ ज्या\ (\ स + अ\ )}{ज्याक}$$

तथा $$टग = \frac{भु.\ ज्यास}{ज्याग}$$

$$\therefore पट^{2} = क\,ट.\,ट\,ग = \frac{भु.\,ज्या\,(स+अ)\times भु.\,ज्यास}{ज्याग.\,ज्याक}$$

$$= \frac{भु^{2}.\,ज्या\,(स+अ).\,ज्यास}{ज्याग.\,ज्याक}$$

$$\therefore \frac{पट^{2}}{भु^{2}} = \frac{ज्या\,(स+अ).\,ज्यास}{ज्याग.\,ज्याक}$$

अत्र भु = सट = सॅट = बृहद्व्यासदलम्, पट = लघुव्यासदलम् ।

तेन $$\frac{\left(\frac{लव्या}{२}\right)^{२}}{\left(\frac{वृव्या}{२}\right)^{२}} = \frac{ज्या\,(स+अ)\;ज्यास}{ज्याग.\,ज्याक}$$

$$\therefore \frac{लव्या^{2}}{वृव्या^{2}} = \frac{ज्या\,(स+अ).\,ज्यास}{ज्याग.\,ज्याक}$$

कल्प्यते ससॅ रेखायां ना, नॅा नाभिबिन्दू। प क्षेत्रस्थबिन्दुः । नाप, नॅाप रेखे कार्ये । स-बिन्दुदिक्स्थाक्षरेखायां अ तथा सॅ-बिन्दुदिक्स्थाक्षरेखायां अॅ क्रमेण मूलबिन्दू। अनयोरुपरि प बिन्दोः म प मॅ लम्बः कार्यः । स-दिक्स्थाक्षरेखायां म बिन्दौ तथा सॅ-दिक्स्थाक्षरेखायां मॅ बिन्दौ क्रमेण लगति ।

तदा नाप = इ. पम

नॅाप = इ. पमॅ

अनयोर्योगेन

नाप + नॅाप = इ (पम+पमॅ) = इ (टअ+टअॅ)

= इ. अअॅ

परन्तु नास = इ. अ स

नासॅ = इ. अ सॅ = इ. अॅ स

अनयोर्योगेन

नास + नांस = इ (अस + अं स)

∴ स सं = इ. अ अं

∴ नाप + नांप = स सं

परन्तु नापट, नांपट त्रिभुजयोः

टना = टनां, पट भुज उभयनिष्ठः

∠नाटप = ∠नांटप = १ समकोणः

∴ नाप = नांप

वा २ नाप = ससं = २ सट

∴ नाप = सट

एवं नास = इ. अस

नांसं = इ. असं

अनयोरन्तरेण

नास − नांस = इ. (असं − अस)

वा नानां = इ. ससं

वा २ नाट = २ इ. सट

∴ नाट = इ. सट

तदा $\frac{\text{लव्या}^2}{\text{वृव्या}^2} = \frac{\text{पट}^2}{\text{सट}^2} = \frac{\text{नाप}^2 - \text{नाट}^2}{\text{सट}^2} = \frac{\text{सट}^2 - \text{नाट}^2}{\text{सट}^2}$

$= 1 - \frac{\text{नाट}^2}{\text{सट}^2} = 1 - \frac{\text{इ}^2 \cdot \text{सट}^2}{\text{सट}^2}$

$= 1 - \text{इ}^2$

$\therefore \frac{वृव्या^2}{लव्या^2} = \frac{1}{1 - इ^2}$

$\therefore \quad 1 - इ^2 = \frac{ज्यास.\ ज्या\ (स + अ)}{ज्यास.\ ज्याक}$

अथवा $\frac{1}{1 - इ^2} = \frac{ज्यास.\ ज्या\ (स + अ)}{ज्याग.\ \ ज्याक}$

इदं स्वरूपं तदैव स्याद्यदा ज्यास. ज्या (स + अ) > ज्याग. ज्याक।

पुनस्तत्रैव अम-अक्षरेखापेक्षया

$$भुजः = पम = सट + अस = भु + \frac{प}{1 + इ}$$

$$\therefore \quad नाप = इ.\ पम = इ\left(भु + \frac{प}{1 + इ}\right)$$

तथा $\quad नाट = सट - नास = सट - इ.\ अस = भु - \frac{इ\ प}{1 + इ}$

$$\therefore \quad पट^2 = नाप^2 - नाट^2 = \left(इ\ भु + \frac{इ.\ प}{1 + इ}\right)^2 - \left(भु - \frac{इ\ प}{1 + इ}\right)^2$$

$$= भु\ (1 + इ)\left\{इ.\ भु - भु + \frac{2\ इ.\ प}{1 + इ}\right\}$$

$$= भु\ (1 + इ)\left\{भु\ (इ - 1) + \frac{2\ इ.\ प}{1 + इ}\right\}$$

$$= भु\ (1 + इ)\left\{\frac{2\ इ.\ प}{1 + इ} - भु\ (1 - इ)\right\}$$

$$= भु\ (1 + इ)\ \{2\ क\ (1 - इ) - भु\ (1 - इ)\}$$

$$= भु\ (1 + इ)\ (1 - इ)\ (2\ क - भु)$$

$$= (1 - इ^2)\ (2\ क.\ भु - भु^2)$$

परन्तु $1 - इ^2 = \frac{ज्यास.\ ज्या\ (स + अ)}{ज्याग.\ ज्याक}$ तथा २ क = सस।

पुनः असस' त्रिभुजे

$$सस' = \frac{अस \times ज्याअ}{ज्या \angle अ' स स} = \frac{न \times ज्याअ}{ज्या\{१८० - (स+अ)\}}$$

$$= \frac{न.\ ज्याअ}{ज्या\ (स+अ)}$$

$$\therefore\ पट^{२} = \frac{ज्यास.\ ज्या\ (स+अ)}{ज्याग.\ ज्याक} \left\{ \frac{न.\ ज्याअ.\ भु}{ज्या\ (स+अ)} - भु^{२} \right\}$$

अथातिपरवलये तु − भु, ज्या (स+अ) इयं धनात्मिका अर्थात् ज्या (स+अ) इयम् ऋणात्मिका भविष्यति तदा सट रेखा अच दिशि लगिष्यति ततः

$$\angle अस'स = \angle ड ट स = ३६० - (स+अ) = \angle क स ट$$

अतः अस'स त्रिभजे पूर्वानुपातवत्

$$सस' = \frac{न.\ ज्याअ}{ज्या\ \{\ ३६० - (स+अ)\ \}} = २\ क$$

तथा कस'ट त्रिभुजे

$$कट = \frac{भु.\ ज्या\ \{३६० - (स+अ)\}}{ज्याक}$$

$$टग = \frac{भु.\ ज्यास}{ज्याग}$$

$$\therefore पट^{२} = कट.\ टग = \frac{भु^{२}\ \ ज्यास.\ ज्या\ \{\ ३६० - (स+अ)\ \}}{ज्याग.\ ज्याक}$$

$$\therefore\ \frac{पट^{२}}{भु^{२}} = \frac{ज्यास.\ ज्या\ \{\ ३६० - (स+अ)\ \}}{ज्याग.\ ज्याक}$$

परन्तु $\frac{पट^{२}}{भु^{२}} = \frac{लव्या^{२}}{वृव्या^{२}} = इ^{२} - १$

$$\therefore \quad इ^2 - १ = \frac{ज्यास. ज्या \{३६० - (स+अ)\}}{ज्याग. ज्याक}$$

एवं परवलये ज्या (स+अ)=ज्या {१८० − (स+अ)} = ज्या सटड=०=∠कसंट, तदा सट रखैव टड रेखा स्यात्। अर्थात् अक रेखा समानान्तरा सट रेखा। अतः परिभाषयार्थात् सूचीकर्णसमानान्तरेण धरातलेन यदा सूची छिद्यते तदा छेदनप्रदेशस्य परवलयत्वं भवति। ततः

$$पट^2 = कट. टग = टग (सत - डस)$$

$$= \frac{भु. ज्यास}{ज्याग} \left\{ \frac{न. ज्या अ - भु. ज्या (स+अ)}{ज्याक} \right\}$$

परन्तु ज्या (स+अ)=०

$$\therefore पट^2 = \frac{ज्यास.ज्याअ.न.भु}{ज्याग. ज्याक}$$

अथ परवलयक्षेत्रशीर्षकस्थ − (२) समीकरणेन

$वम^2 = ४. क\ भु.$ परन्त्वत्र वम=पट

$$\therefore पट^2 = ४ क. भु$$

$$वा \quad \frac{पट^2}{भु} = ४ क$$

$$परन्तु \quad पट^2 = \frac{ज्यास. ज्याअ. न. भु}{ज्याग. ज्याक}$$

$$\therefore \quad ४ क = \frac{ज्यास. ज्याअ, न. भु}{ज्याग. ज्याक. भु.} = \frac{ज्यास. ज्याअ. न}{ज्याग. ज्याक} ।$$

एभ्यः सूत्रावतारः

त्रिभुजस्य शिरोऽस्रसम्मुखो यः किल कोणो ध्रुवसंज्ञकः स एव।
निजभूमिजतस्त्रिबाहुयोगोद्भवरेखात्रिभुजैकदोर्भवो वै ॥ ७ ॥

ध्रुवशिरोऽस्रयुतिर्भदलाल्पिका तदधिका च समा भदलेन चेत् ।
भवति तर्हि विचिन्त्यमिह क्रमात्कथितमेव सदा कुटिलत्रयम् ॥८॥

अथ यदि जचख याम्योत्तरवृत्तं, ख खस्वस्तिकं चज क्षितिजोर्ध्व-स्याहोरात्रवृत्तस्य व्यासमानम् । अ शङ्क्वग्रं, अचज त्रिभुजं याम्योत्तर-वृत्तधरातलीयं लम्बरूपमहोरात्रवृत्तधरातले सस' रेखा पृष्ठक्षितिजल-म्बरूपत्रिभुजधरातलयोर्योगरेखा, तदा अचक कोणो नवत्यंशाधिकः ।

असस' कोणो नवत्यंशाल्पकः । तेन असस' सूची न वृत्ताकारा किन्तु दीर्घवृत्ताकारा सदा पृष्ठक्षितिजोर्ध्वस्थेऽहोरात्रवृत्तस्य परिधौ । एवं यदा अज रेखासमानान्तरा पृष्ठक्षितिजतत्त्रिभुजधरातलयोगरेखा, तदा षट्षष्टिभागाक्षासन्नविषयेषु परवलयाख्यं छेदनाकारं तदन्यत्र तदाकारं चातिपरवलयाख्यं ता एव तेषु देशेषु भाभ्रमरेखाश्चेत्यलं पल्लवितेन ।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

निरक्षदेशे छायाग्राकृतिं कथय चेदिह ।
खं क्रान्तिरस्ति काश्यां च कीदृशी साकृतिस्तथा ॥ ९ ॥

रविपरापमजा द्युतिजाकृतिर्भवति या गिरिजापतिपत्तने ।
कथय तत्र सुमित्र विचित्रतद्भुजजकोटिकलां किल गोलयोः ॥१०॥

भवति यत्र पलोऽक्षिनगांशका दिनपतौ मिथुनान्तमुपागते ।
कथय भाकृतिमस्ति मतेश्च चेद्गतिततिर्भवतः कुटिलत्रये ॥११॥

मेरौ मुरारेरपि यत्र वासश्छायाकृतिस्तत्र विचित्ररूपा ।
विहाय चैतत्कुटिलत्रयं या भवेत्समाचक्ष्व विचिन्त्य तां च ॥१२॥

शङ्क्वग्रे यद्दृष्टिचिह्नं तदीयं यत्स्याद्विद्वन् दृग्भवं लम्बनं वै ।
दृक्तुल्ये तद्युक्तलम्बांशतुल्या यत्र क्रान्तिस्तत्र भारेखिका का ॥१३॥

नतकालभवं विधाय सर्वं नरभाग्रान्तरदिग्लवादिमानम् ।
अपमांशमितेस्ततोऽङ्कनीया द्युतियन्त्रं भवतीति भाकृतिः सा ॥१४॥

अथोपसंहारे तद्रक्षेत्रत्रयप्रशंसा भाप्रशंसा च ।

अतिपरवलयं परादिवृत्तं विदितगतिज्ञभवं तिरोहिताङ्गम् ।
गुणगणजनकं च दीर्घवृत्तं विदितगतिज्ञ भवन्ति रोहिताङ्गम् ॥१५॥

रामक्षेत्रैरिलाजाता सुमित्राङ्गगता मुदा ।
शत्रुघ्नाक्ष्यङ्गुलनृभा साध्या भरतगैर्बुधैः ॥१६॥

यमसौम्यकरैश्चित्रा भा विभाति सतारका ।
मित्रसौम्यकरैराढ्या शारदी रजनीव सा ॥१७॥

रविणा द्विजराजेन कुजजाता बुधेन सा ।
गुरुणा कविना वेद्या छाया छायाभवान्यकम् ॥१८॥

श्रीकाश्यां कमनीयमूर्त्तिरमलः पृथ्वीश्वराख्योऽस्ति यः ।
पञ्चक्रोशपतिश्च तत्र वसति श्रीमान् कृपालुर्द्विजः ॥
तज्जो मैथिलराजराजतनयाकान्तं नितान्तं मुदा ।
ध्यात्वैतद्द्युतिजं सुधाकरकृती चक्रे विदां प्रीतये ॥१९॥

नवरामनवेन्दुविक्रमाब्दे सितघस्रे शुचिमासकृष्णपक्षे ।
द्युतिजातमभूदिदं समाप्तं गणकानन्दकृदष्टमीतिथौ च ॥२०॥

इति श्रीसुधाकरद्विवेदिनिर्मितं भाभ्रमरेखानिरूपणं समाप्तम् ।



परिशिष्टम्

म० म० पं० सुधाकरद्विवेदिनोऽभ्यासार्थं प्रश्नाः

प्रश्नान्वयः--निरक्षदेशे=अक्षांशरहितेदेशे, छायाग्राकृतिं=छायाग्रस्य आकृतिं, कथय ? तथा च काश्यां चेत् खं=शून्यं, क्रान्तिरस्ति (तदा) इह=छायाकृतिः कीदृशी ?

समाधानम्—अक्षांशरहिते देशे नाडीमण्डलस्य सममण्डलत्वात्तथा क्रान्तेरभावान्नाडीवृत्तमेवाहोरात्रवृत्तं भवत्यतो, द्वादशाङ्गुल-शङ्क्वग्रत अहोरात्रवृत्तस्य पालिगता रेखाः कार्यास्तथा ता रेखा विरुद्धदिशि वर्द्धनेन नाडीवृत्तपृष्ठक्षितिजधरातलयोगरेखायामेव लगिष्यन्ति, तेन तत्र भाभ्रममार्गः रेखारूपं भवति ।

शून्यक्रान्तौ काश्यां कुचछन्नोनाक्षांशतो द्युज्याचापांशा अधिका भवन्ति । तत्राहोरात्रवृत्तं क्षितिजादूर्ध्वमधश्चापि गच्छति तेनाहोरात्र-वृत्तस्य प्रतिबिन्दुतः शङ्क्वग्रगतारेखा विरुद्धदिशि वर्धनेन पृष्ठक्षितिजे भाभ्रममार्गस्याकारमतिपरवलयं भवति ॥ ९ ॥

प्रश्नान्वयः—गिरजापतिपत्तने=काश्याम्, रविपरापमजा=रवेः परमाक्रान्त्युत्पन्ना, द्युतिजाकृतिः=छायाकृतिः, या भवति, हे सुमित्र ! तत्र गोलयोर्विचित्रतद्भुजकोटिकलां कथय किल ?

समाधानम्—गिरिजापतिपत्तनेऽहोरात्रवृत्तं पृष्ठक्षितिजादूर्ध्वमधश्चापि याति तेनाहोरात्रवृत्तव्यवस्थयाऽत्रापि भाभ्रममार्गमतिपरवलयं ज्ञेयम् ॥ १० ॥

प्रश्नान्वयः—यत्र दिनपतौ=सूर्ये, मिथुनान्तमुपागते अक्षिनगांशका=द्विसप्तत्यंशः (७२°) पलः=अक्षांशः भवति (तत्र) भाकृतिं=छायाकृतिं, कथय ? चेत् भवतः मतेश्च गतिततिः=गतिविस्तारः, कुटिलत्रये=परवलयातिपरवलयदीर्घवृत्तत्रये अस्ति ।

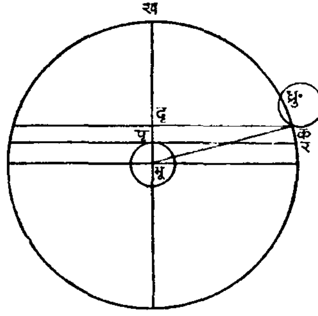
समाधानम्—पलोऽक्षिनागांशके देशे मिथुनान्तगते सूर्ये परमा क्रान्तिर्भवति । तत्काले षट्षष्टिद्युज्याचापांशाश्चातोऽहोरात्रवृत्तं सर्वदा पृष्ठक्षितिजादुपर्येव तिष्ठति, तेनाहोरात्रवृत्तस्य प्रत्येकबिन्दुतः शङ्क्वग्रगता रेखा पृष्ठक्षितिजे यत्र यत्र लगति तत्र तत्र छायाभ्रमणमार्गः दीर्घवृत्तं ज्ञेयम् ॥ ११ ॥

प्रश्नान्वयः—मेरौ=नवत्यक्षांशे देशे, मुरारेरपि=कृष्णस्यापि यत्र वासः निवासः, तत्र छायाकृतिरेतत् कुटिलत्रयं विहाय विचित्ररूपा या भवेत् तां च विचिन्त्य=विचार्य, समाचक्ष्व=कथयस्व ।

समाधानम्—मेरुवासिनां नाडीमण्डलमेव गर्भक्षितिजं तथा पृष्ठक्षितिजमपि नाडीमडलस्य समानान्तरम्, तथा चाहोरात्रवृत्तस्य नाडीमण्डलसमानान्तरत्वात्तेषां गर्भक्षितिजस्याऽपि समानान्तरं भविष्यत्येव । ततो ध्रुवसूत्रे पृष्ठक्षितिजादुपरि द्वादशाङ्गुलशङ्क्वग्रतो अहोरात्रवृत्तस्य पालिगता रेखा विरुद्धदिशि वर्धनेन पृष्ठक्षितिजे समासूची जायते । सा आधारवृत्तस्य समानान्तरधरातलेन किन्तु पृष्ठक्षितिजेन छिन्ना भवत्यतः प्रतिभाबोधकयुक्त्या "छेदनप्रदेशस्य वृत्तत्वम्" ज्ञेयम् । अतः मेरौ भाभ्रममार्गः वृत्तं भवति ।

प्रश्नान्वयः—हे विद्वन् ! शङ्क्वग्रे यद् दृष्टिचिह्नम्, तदीयं यद् दृग्भवं लम्बनं स्यात्, दृक्तुल्ये तद्युक्तलम्बांशतुल्या यत्र क्रान्तिस्तत्र भारेखिका का इति ?

समाधानम्—पृष्ठक्षितिजात्स्वोर्ध्वाधरे द्वादशांङ्गुलशंङ्क्वग्रे दृष्टि-स्थानं कल्पयित्वा लम्बनं साधनीयम् ।



यथा भूदृक त्रिभुजे अनुपातः

$$\frac{\text{त्रि} \times \left(\frac{\text{भू० व्या०}}{२} + १२ \right)}{\text{र क}} = \text{ज्या } \angle \text{भू क दृ}$$

$= \text{ज्या } \angle \text{क भू स}$

अस्याश्चापम् = सक

= दृग्लम्बनम् = दृल

लम्बाश + दृलं = क्रान्तिः यत्र स्यात्

तत्र ९०° − (लंबांश + दृलं) = ९०° − क्रान्तिः ।

अक्षांश — दृलं = द्युज्या = ध्रुक ।

ध्रुवबिन्दुं केन्द्रं मत्वा द्युज्या चापांशव्यासार्द्धेन यद्वृत्तं तद्दृष्टि-क्षितिजादूर्ध्वमेकबिन्दुं स्पृशति तदा दृष्टिस्थानादहोरात्रवृत्तस्य प्रतिबिन्दुगताया रेखाया भाकृतिः परवलयरूपा भवतीति ।। १३ ।।

प्रश्नान्वय :—नरभाग्राचरदिग्लवादिमानं नरभा (शङ्कुच्छाया)

अग्रा-चर-दिग्लवादि (दिगंशादि) मानं सर्वं नतकालभवं विधाय अपमांशमितेः—क्रान्त्यंशप्रमितेः भाकृतिः छायाकृतिः अङ्कनीया। ततः सा द्युतियन्त्रं भवतीति।

समाधानम्—अत्र कदा साक्षदेशे भाभ्रमपथं रेखारूपं भवतीति विचारः क्रियते। द्वादशाङ्गुलशङ्क्वग्रतो निरक्षोर्ध्वाधरसूत्रोपरि लम्बः कार्यः। चेदसौ लम्बो यदा यस्मिन् देशे रवेर्योजनात्मका क्रान्तिसमो भवेत्तदा तस्मिन् देशे तत्काले भाभ्रममार्गो रेखारूपं भवति। यतः शङ्क्वग्रबिन्दुरहोरात्रवृत्तधरातलगतः स्यात्तथा द्वितीयबिन्दुस्त्वहोरात्रवृत्तपालिगतस्तद्धरातलगत एव। शङ्क्वग्रतोऽहोरात्रवृत्तपालिगता रेखा विरुद्धदिशि वर्द्धनेनाहोरात्रवृत्तधरातलपृष्ठक्षितिजधरातलगतयोगरेखायामेव पतिष्यतीति। यथा—

यदा योजनाख्या रवेः क्रान्तिजीवा,
समालम्बमानेन शङ्क्वग्रगेन।
निरक्षीयसूत्रोपरिस्थेन विद्वन्,
तदा भाभ्रमाख्या तु रेखैव साक्षे॥ १४॥

वक्रक्षेत्रत्रयप्रशंसा भाप्रशंसा च

व्याख्या—हे विदितगतिज्ञ! विदिता निरूपिता याः छायाकृतेर्गतयस्ता जानाति इति तत् सम्बुद्धौ। विदितगतिज्ञभवं-गतिं जानातीति गतिज्ञः, ततो भवः गतिज्ञभवः। तिरोहिताङ्गम्-तिरोहितं कल्पितम् अङ्गं यस्य तम् परवलयादित्रितयम्, गुणगणजनकं—गुणाः ज्योतिर्विद्भिः ग्रहीतुं योग्या ये गुणास्तेषां गणः—समुच्चयम् तस्य जनकम् (क्षेत्रादिस्वरूपम्) अतिपरवलयं परादिवृत्तं (परवलयं) दीर्घवृत्तं च रोहिताङ्गं भवन्ति॥ १५॥

व्याख्या—रामक्षेत्रैः=(रामत्रयं श्रीरामः, बलरामः, परशुरामश्च) बिन्दुत्रयैः जाता = उत्पन्ना, इला = पृथ्वीस्वरूपा वृत्ताकाराच्छाया, सुमित्राङ्गगता सुमित्रस्य = सूर्यस्य अङ्गगता=अङ्गीभूता, शत्रुघ्नाक्ष्यङ्गुलनृभा शत्रवः=षट्, घ्न = गुणिता, अक्षिणी = द्वे(६ × २ = १२) अङ्गुल नृभा = शङ्कुछाया, भरतगैः = भारतवर्षीयैः अथवा भे ग्रहनक्षत्रे रताः भरताः तद्गता बुद्धिः येषां तैः बुधैः विद्वद्भिः मुदा=प्रसन्नतया साध्या साधनीया ॥ १६ ॥

व्याख्या—मित्रसौम्यकरैः=सूर्यस्य शुभकिरणैः, आढ्या=बर्द्धिता, यमसौम्यकरैः=कृष्णपक्षस्य शुक्लपक्षस्य च किरणैः, चित्रा = विचित्रा ह्रासमाना वर्द्धमाना च, सतारका = तारकैः नक्षत्रैर्युक्ता, शारदी = शरत्कालीना, रजनीव=रात्रिरिव सा भा=छाया, विभाति शोभायमाना वर्तते ॥ १७ ॥

ग्रन्थकारवंशपरिचयः

व्याख्या – रविणा=सूर्येण, द्विजराजेन=चन्द्रेण, कुजजाता= भौमोत्पन्ना, बुधेन, गुरुणा, कविना = शुक्रेण, छायाभवाभ्यां=राहुकेतुभ्याम्, न्यकेन = शनिना च सा छाया आकारविशेषा वेद्या = ज्ञेया । न्यकः = नि निरुद्धः सन् अकति गच्छतीति न्यकः शनिः ॥ १८ ॥

ग्रन्थोपसंहारः

व्याख्या—श्रीकाश्यां कमनीयमूर्तिः, अमलः=मलरहितः पुण्यदायकः, पञ्चक्रोशपतिश्च यः पृथ्वीश्वराख्योऽस्ति = पृथ्वीश्वरमहादेव अस्ति तत्र श्रीमान् कृपालुर्द्विजः वसति । तज्ज=तस्मात् जातः सुधाकरः इति मैथिलराजराजतनयाकान्तं=मैथिलराज्ञः जनकस्य राजतनया राज-

कुमारी जानकी, तस्याः कान्तं पतिं श्रीरामं नितान्तं मुदा अतिप्रसन्नतया ध्यात्वा सुधाकरकृती एतद् द्युतिजं=द्युतिः च्छाया तस्माज्जातं ग्रन्थं विदां ज्योतिर्विदां प्रीतये=प्रसन्नतायै चक्रे कृतवान् ॥ १९ ॥

व्याख्या—नवरामनवेन्दुविक्रमाब्दे (१९३९ विक्रमशके), शुचिमासे=ज्येष्ठमासे, कृष्णपक्षे अष्टमीतिथौ सितघस्रे=शुक्रवासरे गणकानन्दकृत् भूतिदम् इदं द्युतिजातं छायाविषयकं समाप्तं जातमिति ॥२०॥

परीक्षोपयोगिप्रश्नसंग्रहः

१. यदि व्यासदलबिन्दुरेव मूलबिन्दुर्यस्माद्भुजगणना, तदा साध्यतां यद् अतिपरवलये—

कोटि^{२} = (इ^{२}-१) (भु^{२}- क^{२}), यत्र 'क' बृहद्व्यासदलम् ।

२. अतिपरवलयक्षेत्रस्य स्पर्शरेखाज्ञानं विधीयताम् ।

३. अतिपरवलयस्य लक्षणं प्रकाश्य तत्परिधिस्थबिन्दुतः स्पर्शरेखाकरणे युक्तिर्देया ।

४. परवलये कोटिवर्गं प्रदर्श्य तत्स्पर्शरेखाकरणयुक्तिं प्रदर्शय ।

५. परवलयक्षेत्रे कोटिमानस्य समीकरणमुपपादनीयम् ।

६. परवलयस्य स्पर्शरेखाभिधाने का युक्तिः ?

७. काश्यां मिथुनस्थे रवौ भाभ्रमरेखा निरूपणीया ।

८. छायाभ्रमणे दीर्घवृत्तादिकुटिलत्रयलक्षणं विशदीकरणीयम् ।

९. देशविशेषमुद्दिश्य भाभ्रमरेखामार्गो निर्णीयताम् ।

१०. 'ध्रुवशिरोऽस्त्रयुतिर्भदलाल्पिका ····· सदा कुटिलत्रयम्' क्षेत्रप्रदर्शनपुरस्सरं पद्यमुपपाद्यताम् ।

११. भाभ्रमरेखास्वरूपं निरूपणीयम् ।

१२. 'रामक्षेत्रैरिलाजाता ······भरतगैर्बुधैः' पद्यमिदं विशदीकरणीयम् ।

२३. सप्तत्यंशाक्षदेशे चेद् द्वन्द्वन्तस्थरवेर्बुध ।
क्रान्तिः स्थिरा स्वीक्रियते क्व मार्गस्तर्हि भाभ्रमः ।।
पद्यमिदमुपपाद्यताम् ।।

इति जौनपुरजनपदान्तर्गतसरायत्रिलोकीग्रामनिवासिदैवज्ञशिरोमणिपण्डितमाताभीखशुक्लात्मजदैवज्ञवर्यपण्डितराममूर्तिशुक्लसूनुपण्डित उमाशङ्करशुक्लकृतः सान्वय-समाधान-व्याख्या-टिप्पण्यादिसमलङ्कृतो भाभ्रमरेखानिरूपणग्रन्थो समाप्तः ।
